الجبر الخطي والهندسة التحليلية

المحاضرة الخامسة

المصفوفة المرتبطة: The Adjoint Matrix

إذا كانت A مصفوفة مربعة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة المرتبطة للمصفوفة A هي المصفوفة البديلة لمصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز adj. A فإذا كان A_{rc} هو العامل المرافق للعنصر a_{rc} (أي قيمة المحددة المكونة بحذف كل من الصف والعمود الذي يحتوى على العنصر a_{rc} مع أخذ الإشارة المناسبة حسب قاعدة الإشارات السابق شرحها في باب المحددات، أو بعبارة أخرى المحددة الصغرى للعنصر a_{rc} مع أخذ الإشارة المناسبة) فإن مصفوفة العوامل المرافقة B بنفس رتبة A ، وتكون:

$$Cof(A) = B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Adj\ A = [Cof\ (A)]^t$$

$$\therefore adj.A = B_T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال (3-5): إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

إوجد مصفوفة العوامل المرافقة ثم إوجد المصفوفة البديلة.

<u>الحـــل</u>

العامل المرافق للعنصر a11 هو المحددة:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} = 11$$

والعامل المرافق للعنصر a12 هو المحددة:

$$A_{12} = -\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = -7$$

و هكذا....

وبذلك نحصل على مصفوفة العوامل المرافقة B ونجد أن:

$$B = \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore adj.A = B_T = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

The inverse matrix مقلوب المصفوفة

- **مقلوب المصفوفة:**
- **يتكون مقلوب المصفوفة من المرافق التقليدي لها من العلاقة**
-

ويمكن إثبات هذه العلاقة بعد إيجاد حاصل ضرب A. (Adj. A) حيث ينتج أن:

$A \times adjA =$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & & A_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$A.(Adj\ \ A) = |A|.I$$

$$\because |A| \neq 0$$

$$\therefore A\left[\frac{Adj\ \ A}{|A|}\right] = I$$

$$A^{-1}.A\left[\frac{Adj\ \ A}{|A|}\right] = I.A^{-1}$$

$$I\left[\frac{Adj\ \ A}{|A|}\right] = I.A^{-1}$$

$$\therefore A^{-1} = \left[\frac{Adj\ \ A}{|A|}\right]$$

- وتكون المصفوفة قابلة للقلب إذا كان محددها لا يساوى صفراً، ويقال لمصفوفة مربعة A أنها قابلة للقلب إذا وجدت مصفوفة C تحقق الخاصية $AC=CA=I$ حيث I هي مصفوفة الوحدة التي لها نفس رتبة كل من A,C وتسمى المصفوفة C مقلوب A ويرمز لها بالرمز A^{-1} وهذه العلاقة متماثلة. أي أنه إذا كانت C مقلوب A فإن A مقلوب C
- أي أن $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$.

- مثال :إوجد قيمة A^{-1} إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$adj\ A = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 11 - 2 \times 7 + 3 \times 2 = 3 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|} = \begin{pmatrix} 11/3 & -9/3 & 1/3 \\ -7/3 & 9/3 & -2/3 \\ 2/3 & -3/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 & -3 & 1/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$